ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Γενικά

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία φτιάχνουμε διατεταγμένα ζεύγη αριθμών της μορφής (x,y) σύμφωνα με έναν συγκεκριμένο κανόνα που ονομάζεται **τύπος της συνάρτησης** $y = f(x)$.

Παράδειγμα: Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 + 1$. Τότε, αν το x πάρει διαδοχικά τις τιμές –2, 1, 3, το y θα πάρει τις τιμές

$y = f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$y = f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$y = f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

Έτσι έχουμε φτιάξει τα ζεύγη (-2,5), (1,2), (3,10).

Το ερώτημα που προκύπτει είναι ***από πού αντλούμε τις τιμές του x, δηλαδή τι τιμές μπορεί να πάρει το x.*** Η απάντηση είναι ότι το x παίρνει τιμές μέσα από ένα σύνολο αριθμών που ονομάζεται **Πεδίο Ορισμού** της συνάρτησης f. Το Πεδίο Ορισμού μπορεί να μας δίνεται μαζί με τον τύπο της συνάρτησης. Στην πράξη όμως αυτό δεν συμβαίνει ποτέ. Εκείνο που γίνεται είναι ότι μας δίνεται μόνο ο τύπος της συνάρτησης και εμείς πρέπει να βρούμε *το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *στο οποίο ορίζεται η f χωρίς πρόβλημα.* Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **εύρεση του πεδίου ορισμού.**

2. Πεδία Ορισμού

Όταν μας δίδεται μια άσκηση που περιλαμβάνει συναρτήσεις, πρώτα απ' όλα υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού τους, ακόμα και αν δεν το ζητάει η άσκηση.
Για να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης παίρνουμε τους εξής περιορισμούς:

α) Παρονομαστές $\neq 0$

π.χ. $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$, $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Οπότε $A = R - \{3\}$.

β) Υπόριζη ποσότητα ≥ 0

π.χ. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Οπότε $A = [1, +\infty)$.

γ) Όρισμα λογαρίθμου > 0

π.χ. $f(x) = \ln(x+2)$, $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Οπότε $A = (-2, +\infty)$.

δ) Αν υπάρχει εφx, τότε $x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbf{Z}$

Αν υπάρχει σφx, τότε $x \neq \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbf{Z}$

π.χ. $f(x) = \varepsilon\varphi x + 4,\quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$. Οπότε $A=\{x \in R / x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z\}$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{2-x}{x+1}$ β) $f(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x+1}$

γ) $f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)(x-3)}$ δ) $f(x) = \frac{x}{x^2-3x+2}$

2. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-9}$ β) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$

γ) $k(x) = \ln(x+4) - \frac{1}{x-2}$ δ) $p(x) = 2\varepsilon\varphi x + \ln(x-1)$

Παρατηρήσεις:

Α. Τα υποερωτήματα (γ) και (δ) της άσκησης 1 αναδεικνύουν την ανάγκη να μπορούμε να λύνουμε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

Β. Το υποερώτηματα (β), (γ) και (δ) της άσκησης 2 αναδεικνύουν την ανάγκη να μπορούμε να λύνουμε ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

Για το λόγο αυτό παραθέτουμε τα παρακάτω ***εξαιρετικά χρήσιμα*** προαπαιτούμενα για τον προσδιορισμό του Πεδίου Ορισμού μιας συνάρτησης.

Προαπαιτούμενο 1: ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $\boxed{}$.

Υπολογίζουμε την *διακρίνουσα* $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν Δ>0, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν Δ=0, τότε η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή: $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν Δ<0, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ισχύουν επίσης οι εξής τύποι (τύποι του Vieta):

$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha},\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Εφόσον έχουμε βρει τις λύσεις (ή τη λύση) της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, τότε μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το **τριώνυμο** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ως εξής:

α) Αν υπάρχουν 2 λύσεις x_1, x_2 τότε έχουμε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

β) Αν υπάρχει μόνο μία λύση x_0 τότε έχουμε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$

Προαπαιτούμενο 2: ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

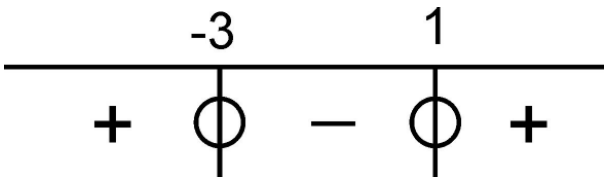
Εστω το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

- Αν Δ>0, τότε το τριώνυμο είναι α) ομόσημο του α εκτός των ριζών
  β) ετερόσημο του α ανάμεσα στις ρίζες
- Αν Δ=0, τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του α (εκτός από τα σημεία που μηδενίζεται)
- Αν Δ<0, τότε το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Μπορούμε εύκολα να βρούμε (με διακρίνουσα) ότι οι ρίζες του είναι $x = 1$ και $x = -3$. Οπότε εκτός των ριζών είναι ομόσημο του $a = 1$ και ανάμεσα ετερόσημο:



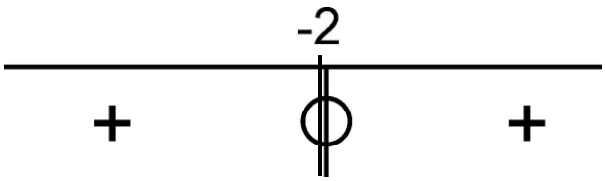
2. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = x^2 + 4x + 4$

Έχουμε:

$f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Οπότε το $f(x)$ έχει μία διπλή ρίζα $x = -2$.

Άρα:



3. Να βρεθεί το πρόσημο του $f(x) = -2x^2 - 1$

Έχουμε:

$-2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$, αδύνατη.

Άρα το $f(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε είναι παντού ομόσημο του $\alpha = -2$:

Τι γίνεται όμως όταν η εξίσωση, ή η ανίσωση που πρέπει να λύσουμε είναι 3^{ου} βαθμού ή και μεγαλύτερου;

Σε κάθε περίπτωση, οι εξισώσεις και οι ανισώσεις μπορούν να λυθούν αν καταφέρουμε να **παραγοντοποιήσουμε** πλήρως την παράσταση που μελετάμε.

Ένα σημαντικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε σε τέτοιες περιπτώσεις είναι το ***Σχήμα Horner.***

Σχήμα Horner

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την πολυωνυμική εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0$ η οποία είναι προφανώς 3^{ου} βαθμού.

α) Πρώτα βρίσκουμε τους διαιρέτες του σταθερού όρου, οι οποίοι είναι οι 1, 2, -1,–2.

β) Χρησιμοποιώντας τους συντελεστές του πολυωνύμου κατασκευάζουμε την εξής διάταξη

1	0	-3	2	

Παρατηρούμε ότι επειδή δεν υπάρχει x υψωμένο στο τετράγωνο, στον αντίστοιχο πίνακα έχει μπει το 0. Στη συνέχεια δοκιμάζουμε έναν - έναν τους διαιρέτες του σταθερού όρου που βρήκαμε παραπάνω. Τον πρώτο αριθμό του πίνακα, δηλαδή το 1, το κατεβάζουμε κάτω από την γραμμή του πίνακα. Διαγωνίως πολ/σιάζουμε με τον αριθμό που είναι πάνω δεξιά, βάζουμε τον αριθμό στην επόμενη στήλη πάνω από την γραμμή και προσθέτουμε κατακορύφως. Συνεχίζουμε τη διαδικασία μέχρι τον τελευταίο αριθμό. Αν το αποτέλεσμα που βρίσκεται στην τελευταία θέση μέσα στο τετράγωνο είναι 0, τότε καταφέραμε να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση. Οι αριθμοί που βρίσκονται κάτω από την γραμμή (εκτός από αυτόν που είναι μέσα στο τετράγωνο) είναι οι συντελεστές του ενός παράγοντα, ενώ ο άλλος είναι το (x-ρ) όπου ρ είναι ο κατάλληλος διαιρέτης του σταθερού όρου.

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	$\boxed{0}$	

Άρα έχουμε: $(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$

Οπότε

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και

$x^2 + x - 2 = 0$, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$, και τελικά παίρνουμε $x = 1$ ή $x = -2$

Παρατηρούμε ότι έχουμε δύο λύσεις, το 1 και το –2, αλλά το 1 εμφανίζεται δύο φορές.

Εφόσον έχουμε καταφέρει να βρούμε όλες τις ρίζες μιας ***πολυωνυμικής εξίσωσης***, τότε έχουμε λύσει πλήρως την εξίσωση.

Αν όμως θέλουμε να λύσουμε την αντίστοιχη ***πολυωνυμική ανίσωση,*** έχουμε ακόμα (δυστυχώς) αρκετή δουλειά να κάνουμε. ☹

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση $(x-1)(x^2+1)(2x^2+3x-5) \geq 0$

Μέθοδος Α: Ευθεία των πραγματικών αριθμών.

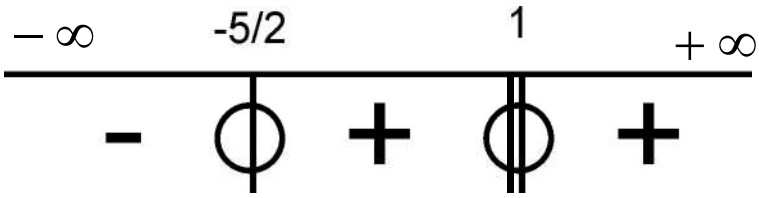
Βρίσκουμε τις ρίζες (λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης) κάθε μιας από τις επιμέρους παρενθέσεις:

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$, αδύνατη

$2x^2+3x-5=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\frac{5}{2}$

Προσοχή: Η ρίζα x=1 εμφανίζεται **δύο φορές**.
Κατασκευάζουμε την παρακάτω ευθεία των πραγματικών αριθμών.



Στην ευθεία αυτή τοποθετούμε **όλες** τις ρίζες **από μία φορά**. Το πρόσημο το βρίσκουμε ως εξής:

1. Στο διάστημα που βρίσκεται στο άκρο δεξιά, τοποθετούμε το πρόσημο που έχει ο συντελεστής του «ολικού» μεγιστοβάθμιου όρου που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των μεγιστοβάθμιων όρων των επιμέρους παρενθέσεων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση $(+1)(+1)(+2)=+2$.

2. Κινούμενοι από δεξιά προς τα αριστερά, όταν «περνάμε» πάνω από ρίζα που εμφανίζεται περιττό πλήθος φορών, αλλάζουμε πρόσημο. Ενώ, όταν «περνάμε» πάνω από ρίζα που εμφανίζεται άρτιο πλήθος φορών διατηρούμε το ίδιο πρόσημο. Έτσι, στο παράδειγμά μας ξεκινάμε με + από δεξιά, διατηρούμε το + στο διάστημα (-5/2, 1) αφού η ρίζα x=1 εμφανίζεται δύο φορές, και βάζουμε – στο αριστερό διάστημα αφού η ρίζα x=-5/2 εμφανίζεται μία φορά.

Η λύση είναι το $x \in \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

Παρατηρήσεις:

1. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται μόνο σε πολυωνυμικές παραστάσεις.

2. Όταν στην ανίσωση υπάρχει όρος της μορφής $(f(x))^{\kappa}$***, τότε θεωρούμε ότι οι ρίζες της*** $f(x)$ ***εμφανίζονται κ φορές.***

Έτσι, τώρα είμαστε **<u>πανέτοιμοι</u>** για να αντιμετωπίσουμε τις περισσότερες περιπτώσεις υπολογισμού του Πεδίου Ορισμού μια συνάρτησης! ☺ ☺ ☺
Οπότε:

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

1. $f(x)=x^2-4$
2. $f(x)=x^2+x-2$
3. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$
4. $f(x)=\sqrt{2x^2+x-3}$
5. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-1}$
6. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{2x-1}+\sqrt{x^2-5x+6}$